جامعة الفرات	امتحان مقرر معادلات تفاضلية (1)	الاسم :
كلية العلوم	دورة فصل أول 2024/2023	المدة : ساعتان
قسم الرياضيات	سنة ثانية رياضيات	الدرجة:100

السؤال الأول (20 درجة):

لتكن لدينا مجموعة المنحنيات الجبرية:

$$y^2 = c(1-x^2)\ ;\ y = y(x)$$

1- **أوجد المعادلة التفاضلية الموافقة لها ثم حدد مرتبة ودرجة المعادلة الناتجة.**

2- **أوجد المسارات المتعامدة مع المنحنيات السابقة.**

السؤال الثاني (20 درجة):

تحقق فيما إذا كانت المعادلة التفاضلية:

$$xyy' - 2y^2 - 4x^4 = 0$$

ذات تجانس عام ثم أوجد حلها العام.

السؤال الثالث (20 درجة):

أوجد عامل تكميل للمعادلة التفاضلية:

$$y(x+y)dx + (xy+1)dy = 0$$

ثم أوجد الحل العام والشاذ (إن وجد).

السؤال الرابع (20 درجة):

حل المعادلة :

$$y' - y\ \tan x = -\frac{y^2}{\cos x}\ ;\ y = y(x)$$

السؤال الخامس (20 درجة):

عين قيمة الثابت a حتى يكون للمعادلة الآتية حلاً خاصاً $y = a\,x$:

$$xy' - y + y^2 - x^2 = 0$$

ثم استفد من ذلك في إيجاد الحل العام لها.

الحسكة 2024/1/22 م **تمنياتي للجميع بالنجاح والتوفيق** **مدرس المقرر**

د.حسين قريوي

سلم تصحيح معادلات تفاضلية (١) ـ ثانية رياضيات

1/5

السؤال الأول: (20 درجة)

١ـ إن المعادلة الجبرية تحوي ثابت اختياري واحد لذلك

نشتق مرة واحدة بالنسبة لـ x ، فنجد أن: 2

$$2yy' = c(-2x)$$

3

$$\Longrightarrow c = \frac{-yy'}{x}$$

بالتعويض نجد أن:

$$y^2 = \left(\frac{-yy'}{x}\right)(1-x^2)$$

5

$$\Longrightarrow xy^2 = yy'(-1+x^2)$$

$$\Longrightarrow xy = y'(x^2-1) \ ; \ y \neq 0$$

3

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى.

2

2 ـ لإيجاد المسارات المتعامدة نبدل كل y' بـ $-\frac{1}{y'}$:

$$xy = -\frac{1}{y'}(x^2-1)$$

3

$$\Longrightarrow xyy' = 1-x^2 \Longrightarrow xy\frac{dy}{dx} = 1-x^2$$

$$\Longrightarrow y\,dy = \left(\frac{1}{x}-x\right)dx \ ; x \neq 0$$

2

$$\Longrightarrow \frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + c \ ; \ c \text{ ثابت اختياري}$$

2/5

السؤال الثاني : (20 درجة)

نبدل في المعادلة :

$$x \mapsto \lambda x , \quad dx \mapsto \lambda dx$$

$$y \mapsto \lambda^k y , \quad dy \mapsto \lambda^k dy \qquad 3$$

$$y' \mapsto \lambda^{k-1} y'$$

نجد أن :

$$\lambda x \, \lambda^k y \, \lambda^{k-1} y' - 2\lambda^{2k} y^2 - 4\lambda^4 x^4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^{2k} x y y' - \lambda^{2k} 2y^2 - \lambda^4 4x^4 = 0 \qquad 2$$

حتى تكون المعادلة ذات تجانس عام يجب أن يكون:

$$2k = 4 \Rightarrow \boxed{k = 2} \qquad 3$$

نفرض أن $z = \frac{y}{x^2}$ 2 وبالتالي:

$$y = z x^2 \Rightarrow y' = 2xz + x^2 z'$$

نبدل في المعادلة :

$$x^3 z (2xz + x^2 z') - 2x^4 z^2 - 4x^4 = 0$$

$$z(2z + xz') - 2z^2 - 4 = 0 ; \; x^4 \neq 0 \qquad 5$$

$$\Rightarrow 2z^2 + xzz' - 2z^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow xz\frac{dz}{dx} = 4 \Rightarrow z\,dz = 4\frac{dx}{x}$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} \frac{z^2}{2} = 4\ln|x| + c \Rightarrow z^2 = 8\ln|x| + c_1 \qquad 5$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{x^4} = 8\ln|x| + c_1$$ ؛ c_1 ثابت اختياري

3/5

السؤال الثالث : (20 درجة)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial M}{\partial y} = x + 2y \\[2mm] \dfrac{\partial N}{\partial x} = y\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

5

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} = -\frac{1}{y} = f(y)$$

والمعادلة تقبل عامل تكميل تابع لـ y وهو حل للمعادلة :

5

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{y}\,dy \Longrightarrow \mu = \frac{1}{y}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فتصبح تامة :

$$x\,dx + y\,dx + x\,dy + \frac{1}{y}\,dy = 0$$

5

$$\Longrightarrow d\left(\frac{x^2}{2}\right) + d(xy) + d(\ln y) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{2} + xy + \ln y = c \Longrightarrow \ln y = c - \frac{x^2}{2} - xy$$

$$\Longrightarrow y = e^{c - \frac{x^2}{2} - xy}$$

2

وجدنا أن $\mu = \frac{1}{y}$ وعندما $\mu \longrightarrow \infty$ فإن $y = 0$. نلاحظ

أن $y = 0$ هو حل للمعادلة وينتج من الحل العام بإعطاء $C = -\infty$

3

فهو حل خاص .

4/5

السؤال الرابع :

(20 درجة)

$$y' - \frac{\sin x}{\cos x} y = -\frac{1}{\cos x} y^2$$ 2

وهي معادلة بيرنولي ولإيجاد حلها العام نقسم على $y^2 \neq 0$ فنجد أن :

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{\sin x}{\cos x}\frac{y}{y^2} = -\frac{1}{\cos x}$$ 3

$$\Longrightarrow y' y^{-2} - \frac{\sin x}{\cos x} y^{-1} = -\frac{1}{\cos x}$$

نفرض أن :

$$z = y^{-1} \;;\; z = z(x) \Longrightarrow z' = -y^{-2} y'$$

3 $$\Longrightarrow y^{-2} y' = -z'$$

نعوض في المعادلة : 2

$$-z' - \frac{\sin x}{\cos x} z = -\frac{1}{\cos x} \Longrightarrow z' + \frac{\sin x}{\cos x} z = \frac{1}{\cos x}$$

$$\mu = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)} = \frac{1}{\cos x}$$

5

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل :

$$\frac{1}{\cos x} z' + \frac{\sin x}{\cos^2 x} z = \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow \frac{dz}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} z\,dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

2

$$\Longrightarrow d\left(\frac{z}{\cos x}\right) = d(\operatorname{tg} x) \Longrightarrow \frac{z}{\cos x} = \operatorname{tg} x + c$$

$$\Longrightarrow z = (\operatorname{tg} x + c)\cos x$$

نعوض $z = y^{-1} = \frac{1}{y}$ فنجد أن :

$$\frac{1}{y} = (\operatorname{tg} x + c)(\cos x) \Longrightarrow y = \frac{1}{\cos x(\operatorname{tg} x + c)}$$ 3

ونلاحظ أن $y = 0$ هو حل خاص للمعادلة .

5/5

السؤال الخامس:

(20 درجة)

بما أن $y = ax$ حل خاص فهو يحققها، أي أن:

$$ax - ax + a^2x^2 - x^2 = 0 \quad 2$$

$$\Rightarrow (a^2-1)x^2 = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \mp 1} \quad 3$$

إذاً يوجد حلين خاصين هما:

$$y_1 = x \ \& \ y_2 = -x \quad 2$$

إن المعادلة تكتب بالشكل:

$$y' = -\frac{1}{x} y^2 + \frac{1}{x} y + x \quad 3$$

وهي معادلة ريكاتي وفيها $p(x) = -\frac{1}{x}$.

$$5 \quad \frac{y - y_1}{y - y_2} = c\, e^{\int p(x)(y_1 - y_2)dx}$$

$$\Rightarrow \frac{y-x}{y+x} = c\, e^{\int -\frac{1}{x}(x+x)dx}$$

$$= c\, e^{-2\int dx}$$

$$\Rightarrow \frac{y-x}{y+x} = c\, e^{-2x} \Rightarrow y(1 - c e^{-2x}) = x + x e^{-2x} c$$

5

$$\Rightarrow y = \frac{(x e^{-2x})c + x}{(-e^{-2x})c + 1}$$

c ثابت اختياري.

مدرس المقرر

د. حسين تربوي